EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATIK DER LEBENSVERSICHERUNG

P. O. Runck, Linz

Zunächst möchte ich einige Bemerkungen zu den Lebensversicherungen bringen und die Lebensversicherungen von den Nichtlebensversicherungen und den Sozialversicherungen abgrenzen, sodann auf einige geschichtliche Daten eingehen.

Zu den <u>Lebensversicherungen</u> gehören die Todesfall-, Erlebensfall- und gemischten Versicherungen (= kombinierte Erlebensfall- Todesfallversicherungen) sowie die verschiedenen Leibrentenversicherungen. (Es gibt noch weitere Lebensversicherungen wie z.B. die Aussteuerversicherungen und die Versicherungen auf verbundene Leben)

Im Gegensatz hierzu stehen die <u>Nichtlebensversicherungen</u> wie z.B. Feuer-, Autohaftpflicht-, Krankenversicherungen sowie Flugzeugversicherungen, Versicherungen von technischen Großprojekten und Rückversicherungen.

Weiter stehen die Lebensversicherungen (die Versicherungen auf freiwilliger Basis darstellen) im Gegensatz zur gesetzlichen Sozialversicherung.

Der wesentliche Unterschied der Lebensversicherungen gegenüber der Sozialversicherung ist der folgende:

Die Leistungen der Sozialversicherung werden durch den

"G e n e r a t i o n e n v e r t r a g"

aufgebracht, d.h. die arbeitende Bevölkerung kommt für die Alters- und Invalidenversorgung auf (Beiträge von Arbeitnehmer und Arbeitgeber sowie Zuschüsse vom Staat).

Die Leistungen der Lebensversicherungen werden durch die Versicherungsnehmer selbst aufgebracht, nach dem sogenannten

"Ä q u i v a l e n z p r i n z i p",

auf das wir nachher genauer zu sprechen kommen.

Durch die Lebensversicherungen wird die Möglichkeit gegeben, sich eine zusätzliche Altersversicherung zu verschaffen. Auch die sogenannten Betriebsrenten gehören zu den Lebensversicherungen. Die Lebensversicherungen werden vom Staat anerkannt und durch Steuerabsetzbeträge unterstützt. Weiter werden neben den verschiedenen Risikenabdeckungen die Lebensversicherungen auch als Sparformen genutzt und stehen somit den verschiedenen Sparformen, wie Bausparen, Prämiensparen, Pfandbriefsparen und anderen Sparformen der

Sparkassen und Banken gegenüber. Wesentlich hierbei ist, daß im Gegensatz zu anderen Sparformen eine Lebensversicherung eine Risikokomponente enthält. Weiter bietet eine Lebensversicherung die Möglichkeit, daß sie bis zur Höhe des Rückkaufwertes beliehen werden kann.
Die Lebensversicherungen haben eine große volkswirtschaftliche Bedeutung. Es werden innerhalb eines Jahres große Geldmengen umgesetzt. Die Gelder der Lebensversicherungen stellen auf dem Kapitalmarkt einen wesentlichen Faktor dar, und sie werden langfristig an Wirtschaft, Industrie und Banken verliehen.

Bemerkungen zur Geschichte

Die Entwicklung der diversen Versicherungsformen begann etwa ab dem 16. Jahrhundert. Sie war eng verbunden mit Katastrophen. Es gab am Anfang Fehlberechnungen und große Enttäuschungen. Erst mit Hilfe der mathematischen Fundierung in Gestalt der Versicherungsmathematik und der staatlichen Aufsicht wurde eine solide Grundlage gelegt, und es begann der Siegeszug der Versicherungen.

Am Anfang standen die Seefahrtversicherungen (1531) und die Feuerversicherungen (1680). Letztere nach dem Großbrand in London 1666. Die großen Feuerversicherungen entstanden im 18. Jahrhundert. Jedoch der Großbrand in Hamburg 1842 machte die betroffenen Versicherungsunternehmer zahlungsunfähig. Es wurden die ersten Rückversicherungen gegründet. Der Großbrand in San Francisco (nach dem Erdbeben 1906) traf dann schon auf ein gut funktionierendes System von Versicherungen und Rückversicherungen (75% des Schadens von 500 Mio Dollar konnten von den 200 betroffenen Gesellschaften ersetzt werden).

Im Bereich der Lebensversicherungen begannen im 18. Jahrhundert verschiedene Versuche, die zunächst alle scheiterten.
Erst als 1762 die "Equitable" über eine ärztliche Untersuchung eine negative Risikoauslese verhinderte und die Tarife aus den Sterbetafeln berechnete, begann der Siegeszug der Lebensversicherung.
Heute haben sich die Grundlagen der Lebensversicherung dabei nicht wesentlich verändert, sie haben sich nur den Bedürfnissen der Zeit angepaßt. Ein großer Einschnitt kam durch den Einsatz der digitalen Rechenautomaten. Für große Datenbestände lassen sich exakte Rechnungen durchführen, wie z.B. genaue Berechnungen der Gewinnanteile.

Das Äquivalenzprinzip (Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung).
Eine allgemeine Risikoversicherung liegt vor, wenn zwischen der Versicherungsgesellschaft einerseits und dem Versicherungsnehmer andererseits eine Vereinbarung getroffen wird derart, daß

gegen Bezahlung von bestimmten Prämien durch den Versicherten,
sich die Versicherungsgesellschaft verpflichtet,
im Falle des Eintretens eines wohl definierten Ereignisses
in einem bestimmten Zeitintervall eine Schadensumme zu zahlen.

Die nach oben begrenzte Schadensumme kann fest, z.B. bei Lebensversicherungen, oder variabel, z.B. bei Haftpflichtversicherungen, sein.
Die Berechnung der Prämien erfolgt nach dem

Äquivalenzprinzip:

Leistung des Versicherungsnehmers = Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft

Hierzu sind einige Erläuterungen anzubringen:
i) Das Prinzip verlangt nicht, daß in jedem Einzelfall die Prämienleistungen den Versicherungsleistungen entsprechen. Der Fall, daß ein Versicherter nach der Bezahlung der 1. Prämie stirbt und die vereinbarte Summe ausbezahlt wird, widerspricht nicht dem Äquivalenzprinzip. Das Prinzip bedeutet nicht einmal die Gleichheit von Leistung und Gegenleistung bei einem ganzen Versicherungsverband. Leistung und Gegenleistung sind während der Versicherungsdauer (bis auf wenige Ausnahmen) vom Zufall abhängig, also nicht mit Sicherheit vorauszusagen. Somit kann nur, wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik üblich, mit Erwartungswerten und Streuungen gearbeitet werden. Obiges Prinzip besagt somit

Erwartungswert der Leistung... = Erwartungswert der Gegenleistung...

In der Lebensversicherung werden die Sterbewahrscheinlichkeiten aus den sogenannten Sterbetafeln entnommen.*)

*) So hat z.B. ein 30-jähriger Versicherungsnehmer eine reine Todesfallversicherung mit der Laufzeit eines Jahres 2,20‰ der Versicherungssumme als Nettoprämie aufzubringen (2,20‰ ist die Wahrscheinlichkeit eines 30-jährigen, im Laufe des nächsten Jahres zu sterben).

ii) Die Leistungen und Gegenleistungen werden i.a. zu verschiedenen Zeitpunkten fällig. Somit ist es notwendig, alle Zahlungen auf einen bestimmten Zeitpunkt (z.B. den Beginn der Versicherung) zu diskontieren. Im Fall, daß dieser Zeitpunkt der Beginn der Versicherung ist, heißen die diskontierten Werte Barwerte.

Somit bedeutet das Äquivalenzprinzip

Barwert des Erwartungswerts der Leistung des Versicherungsnehmers	=	Barwert des Erwartungswerts der Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft

iii) Zu den Gegenleistungen gehören auch die verschiedenen Kosten, die der Versicherungsgesellschaft entstehen. Das Anbieten dieser Leistungen hat seinen Preis.

Rechnungsgrundlagen

Man benötigt bei der Berechnung von Prämien bei den einzelnen Versicherungsformen drei Rechnungsgrundlagen und zwar

1. Rechnungsgrundlage: die Zinsrechnung
2. Rechnungsgrundlage: die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Versicherungsereignisse und der zugehörigen Schadenhöhen.
3. Rechnungsgrundlage: die Kosten.

Bei der mathematischen Behandlung von Lebensversicherungen und Nichtlebensversicherungen ergibt sich ein grundlegender Unterschied. Die 2. Rechnungsgrundlage kann bei den Lebensversicherungen deterministisch aufgebaut werden. Das wird einmal dadurch bedingt, daß die Sterbewahrscheinlichkeiten der herangezogenen Sterbetafeln bei Zugrundelegung einer größeren Personenzahl mit der Wirklichkeit sehr gut übereinstimmen und nur geringe Abweichungen auftreten. Zum anderen sind Lebensversicherungen i.a. langfristige Verträge. Die Prämien werden hierbei nicht nur zur Abdeckung eines Risikos verwendet, sondern auch zur Ansammlung eines Sparkapitals (durch Ansammeln von Reserven nimmt das riskierte Kapital für die Versicherungsgesellschaft ab, obwohl die Sterblichkeit zunimmt). Sodann ist die Schadenhöhe, gemessen an den Prämien und Reserven, wesentlich geringer als bei den Nichtlebensversicherungen und schließlich ist die Schadenhöhe bekannt.

Bei den Nichtlebensversicherungen stellt die sogenannte kollektive Risikotheorie die 2. Rechnungsgrundlage dar.

1. Rechnungsgrundlage: Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist ein Teilgebiet der Finanzmathematik. Wir wollen hier nur einige Grundtatsachen betrachten, die wir später benötigen.

Unter Zins eines Kapitals K versteht man den Ertrag von K in einem gewissen Zeitintervall, der sogenannten Zinsperiode.

Beispiel einer Zinsperiode: 1 Jahr, 1 Monat

Bemerkung. Vom Zins wird gefordert:

i) der Zins ist proportional zum Kapital

ii) der Zins wird nach Ablauf einer Zinsperiode auf das Kapital geschlagen und wiederverzinst (Zinseszins)

Wir beschränken uns hier auf die Zinsperiode 1 Jahr.
Der Prozentsatz des Zins bezogen auf das Kapital wird Zinsfuß genannt.

Die Berechnung von Kapitalien, Prämien, Zinsen wird stets auf einen ganz bestimmten Zeitpunkt bezogen. Man unterscheidet einmalige und periodische Zahlungen.

Einmalige Zahlungen

Einige übliche Bezeichnungen

- P Barwert (Anfangswert) eines Kapitals
- S Endwert eines Kapitals
- p Zinsfuß
- i Zins, der in 1 Jahr auf das Kapital 1 realisiert wird ($i = \frac{p}{100}$)
- $r := 1 + i$ Aufzinsungsfaktor für ein Jahr
- $v := \frac{1}{1+i}$ Abzinsungsfaktor (Diskontierungsfaktor) für 1 Jahr

Endwert eines Kapitals nach n Jahren

Bei jährlicher Verzinsung beträgt der Endwert S des Kapitals P

nach einem Jahr $S = P(1+i)$

nach n Jahren $\boxed{(*)\ S = P(1+i)^n = Pr^n}$

(Ist die Dauer n Jahre k Monate, so verwendet man meist $S = P(1+i)^n(1+i\frac{k}{12})$ anstelle von Formeln für den unterjährigen Zins).

Hieraus folgt für den Barwert eines Kapitals, das nach n Jahren fällig wird

$$(\ast)\ P = \frac{S}{(1+i)^n} = Sv^n$$

Beispiel:

Endwert S = 100.000,- ÖS,

n = 20 Jahre

Zinsfuß	Barwert
3%	55.368,- ÖS
6%	31.180,- ÖS
8%	21.455,- ÖS

Periodische Zahlungen (Zeitrente)

Unter einer Zeitrente versteht man periodische Zahlungen von gleichem Betrag bei vorgegebener Anzahl von Zahlungen.

Erfolgen die Zahlungen am Beginn bzw. Ende der Zeitperioden, so spricht man von "vorschüssiger" bzw. "nachschüssiger" Zeitrente.

Wir betrachten nur vorschüssige Zeitrenten.

Übliche Bezeichnungsweise:

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ Endwert } einer ganzjährigen n-mal vorschüssig bezahlbaren
$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ Barwert } Rente vom Betrag 1

(Bemerkung: "··" ist die Bezeichnung für vorschüssig).

Nach (*), ($\ast$) erhalten wir (mit $r = 1+i$, $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + \ldots + r^n = r\,\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{r}{i}\,(r^n-1)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_n \cdot v^n = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{i}\,(\frac{1}{v^n} - 1)v^n = \frac{1-v^n}{v \cdot i}$$

(Bei einer Rente vom Betrag B folgt somit für den Endwert $B \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|}$)

Sparvorgänge:

Wird ein Kapital K durch eine oder mehrere Prämien innerhalb von n Jahren angespart, so spricht man von einem Sparvorgang.

Die Berechnung der Prämien erfolgt mittels der soeben abgeleiteten Formeln:

α) Einmalprämie (= Barwert) $B = K \cdot v^n$

β) n-malige vorschüssige Prämie B

$$K = B \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} \Rightarrow B = \frac{K}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = \frac{K}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \cdot r^n$$

Beispiel: $K = 100.000$.- ÖS, $n = 20$

Zinsfuß	$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{r}{i}(r^n-1)$	Prämie $K/\ddot{s}_{\overline{n}|}$	Summe aller Prämien	Einmalprämie (= Barwert) $K \cdot v^n$
3%	27.677	3.613,-	72.260,-	55.368,-
6%	38.992	2.565,-	51.300,-	31.180,-
8%	49.424	2.023,-	40.060,-	21.455,-

2. Rechnungsgrundlage

Wie gesagt wird das Eintreten von Versicherungsfällen natürlich vom Zufall beeinflußt. Jedoch kann man ein deterministisches Modell aufbauen, das die Wirklichkeit genügend gut annähert.

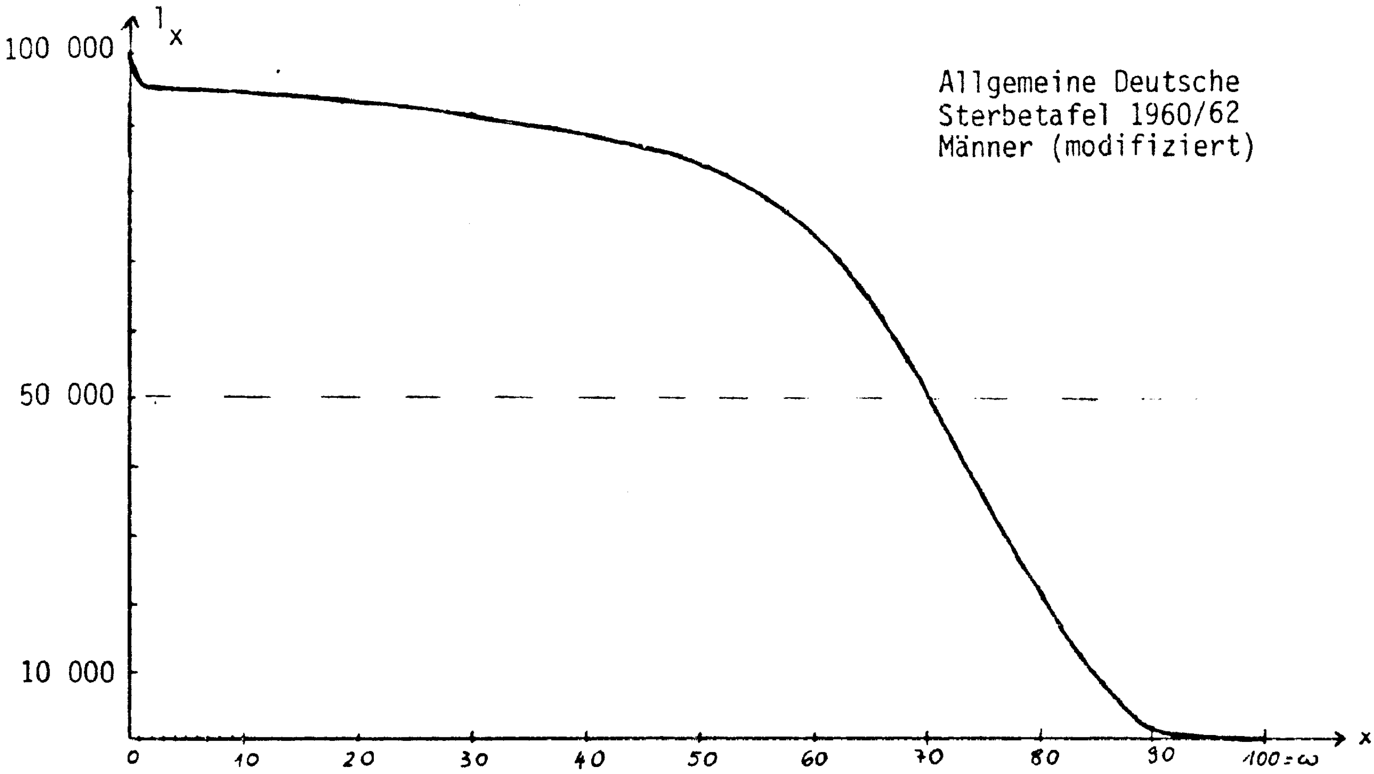
Sterbewahrscheinlichkeit

Die wichtigste Größe der Lebensversicherungsmathematik ist die Wahrscheinlichkeit q_x dafür, daß ein x-jähriger im Laufe des folgenden Jahres, also vor Erreichung des Alters $x + 1$ stirbt. q_x heißt Sterbewahrscheinlichkeit, angegeben meist in ‰. Das bedeutet, daß von 1000 x-jährigen im Mittel $1000\, q_x$ Todesfälle zu erwarten sind. Die Sterbewahrscheinlichkeit wird in Abhängigkeit vom Alter angegeben. Anderen Einflüssen wie Geschlecht, Familienstand, Beruf wird dadurch Rechnung getragen, daß man die Sterbewahrscheinlichkeit hierfür getrennt bestimmt.

Sterbetafeln (Absterbeordnung)

Mit Hilfe der Sterbewahrscheinlichkeiten lassen sich die zu erwartenden Anzahlen l_x von Personen berechnen, die von einem fiktiven Ausgangsbestand von l_o (meist 100.000) Nulljährige das Alter x erleben.

Wir geben eine graphische Darstellung einer Sterbetafel für Männer (Allgem. deutsche Sterbetafel 1960/62 modifiziert), wobei l_x in Abhängigkeit vom Alter $x \varepsilon \{0,1,\ldots 100\}$ aufgezeichnet ist. Neben l_x und q_x wird in den Sterbetafeln auch $d_x := l_x - l_{x+1}$, die Anzahl der Toten vom Jahr x zum Jahr x + 1 angegeben.



Es folgt für diese Größen noch

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}\ ; \qquad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}-l_x}{l_x} = 1 - q_x \quad \text{(Erlebenswahrscheinlichkeit)}$$

Hieraus lassen sich weitere Wahrscheinlichkeiten leicht ableiten wie z.B.:

$${}_np_x := \frac{l_{x+n}}{l_x}$$ Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen noch mindestens n Jahre zu leben.

$${}_{n|}q_x := \frac{d_{x+n}}{l_x}$$ Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen das Alter x+n zu erreichen und im folgenden Jahr zu sterben.

$$= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = {}_np_x \cdot q_{x+n}$$

Bemerkung: Es gelten die Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie, da die Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bestimmt werden.

Bemerkung: Man verwendet in der Versicherung sogenannte modifizierte Sterbetafeln und zwar derart, daß die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten kleiner sind als die in der Tafel angegebenen. Der Sterblichkeitsgewinn, der hierbei erzielt wird, fließt wieder an die Versicherungsnehmer zurück.

Beispiel: Von 1000 30-jährigen, die eine Lebensversicherung abschließen, sterben im Mittel im Alter von

30 - 31	Jahren	2,20
31 - 32	"	2,23
39 - 40	"	3,18
49 - 50	"	6,90

Die Risikoprämie bei einer Todesfallversicherung von 100.000,- ÖS beträgt dann 220,- bzw. 223,- bzw. 318,- bzw. 690,- ÖS.

Berechnung der Barwerte und Nettoprämien einiger Lebensversicherungen.

Wir sind nunmehr in der Lage, mit den beiden Rechnungsgrundlagen 1. und 2. Ordnung die Barwerte und Nettoprämien einiger Lebensversicherungen zu berechnen. Hierbei ist auf folgende wesentliche Tatsache aufmerksam zu machen. Eine Lebensversicherung besteht i.a. für eine verhältnismäßig lange Zeit (oft über 25-30 Jahre). Man kennt im voraus die Zinsentwicklung nicht.

Der Zinssatz, der zugrunde gelegt wird, muß für diese Zeit eingehalten werden. Die Versicherungsaufsichtsbehörde ist daran interessiert, daß alle eingegangenen Verpflichtungen erfüllt werden und keine Versicherungsgesellschaft zahlungsunfähig wird. So ist es in Österreich und Deutschland üblich, einen rechnungsmäßigen Zinsfuß von 3% anzunehmen, der bei der Prämienberechnung zugrundegelegt wird. Dem steht zur Zeit ein effektiver Zinsfuß von über 7% gegenüber. Der effektive Zinsfuß ist jedoch über einen längeren Zeitraum nicht konstant. Nun wird von der Aufsichtsbehörde festgelegt, daß mindestens 85% (in der BRD 90%) des Gewinns an die Versicherungsnehmer wieder zurückerstattet werden müssen. Dies geschieht meist in Form eines Gewinnanteils, der bei Fälligwerden des Versicherungsvertrags zusammen mit der Versicherungssumme ausbezahlt wird.

Bemerkung zum Beispiel bei den Sparvorgängen:
Wird für K = 100.000,- ÖS, n = 20, die Prämie mit dem rechnungsmäßigen Zins von 3% berechnet, liegt jedoch eine effektive Verzinsung von 6% (bzw. 8%) vor, so folgt als auszuzahlendes Kapital
3.613,- x 38.992 = 140.878,- ÖS (bzw. 3.613,- x 49.424 = 178.569,- ÖS)
[Prämie (bei 3%)x $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ (bei 6% bzw. 8%)]

Wichtige Lebensversicherungsarten

Wir wollen zunächst einige wichtige Lebensversicherungen vorstellen:

a) Erlebensfallversicherung

Am einfachsten ist der Barwert einer (reinen) Erlebensfallversicherung zu bestimmen. Mit ${}_nE_x$ wird der Barwert dieser Versicherung vom Betrag 1 bezeichnet, wobei x das Abschlußalter und n die Laufzeit bezeichnen.

Es folgt

$$ {}_nE_x = \underbrace{\frac{l_{x+n}}{l_x}}_{(x)} \cdot \underbrace{v^n}_{(xx)} $$

(x) Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen das Alter x+n zu erleben

(xx) Diskontierung mit $v = \frac{1}{1+i}$

Für die einfachere Berechnung führt man Hilfswerte (Kommutationswerte) ein, die aus l_x und v gebildet werden und in Tabellen zusammengefaßt sind. Hier bildet man den Wert $D_x := l_x v^x$, woraus folgt

$$ \boxed{{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}} $$

${}_nE_x$ ist somit auch der Betrag der Einmalnettoprämie.

b) **Leibrenten**

α) vorschüssige, sofort bezahlbare, lebenslange Leibrente

Zum Abschlußalter	x	wird	der	Betrag	1	ausbezahlt
im Alter	x + 1	"	"	"	1	"
"	x + 2	"	"	"	1	"

usf. bis zum Lebensende.

Der Barwert wird mit $\ddot{a}_x$ bezeichnet. Es folgt mit a) (Erlebensfallversicherung)

$$ \boxed{\ddot{a}_x = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \dots + \frac{l_\omega}{l_x} v^{\omega-x} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \dots + \frac{D_\omega}{D_x} =: \frac{N_x}{Dx}} $$

mit dem Kommutationswert $N_x := D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$ (ω Höchstalter).

Aus dieser Leibrente folgen

β) vorschüssige, um n Jahre aufgeschobene, lebenslange Leibrente (Altersrente)

im Alter x + n,	wird	falls	dieses	erreicht wird,	der Betrag	1	ausbezahlt
im Alter x + n + 1	"	"	"	"	"	1	"

usf. bis zum Lebensende.

Der Barwert wird mit ${}_{n|}\ddot{a}_x$ bezeichnet

$$ \boxed{{}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n + \dots + \frac{l_\omega}{l_x} v^{\omega-x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \dots + \frac{D_\omega}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}} $$

γ) vorschüssige, sofort bezahlbare n Jahre dauernde Leibrente (temporäre Leibrente)

zum Abschlußalter x wird der Betrag 1 ausbezahlt
im Alter x+1 " " " 1 "

usf. bis zum Tod, höchstens n Jahre.

Der Barwert wird mit $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ bezeichnet.

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}}$$

c) **reine Todesfallversicherung** (n-jährige Risikoversicherung)

mit $_{|n}A_x$ wird der Barwert dieser Versicherung vom Betrag 1 bezeichnet. Hierbei bedeutet x das Abschlußalter und n die Laufzeit. Dieser Betrag wird nur dann ausbezahlt, wenn der Versicherungsnehmer in dieser Zeit stirbt. Es gilt

$$_{|n}A_x = \frac{d_x}{l_x} v + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} v^n$$

$$= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} v + \ldots\ldots\ldots + \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} v^n$$

$$= v\left(\frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} v^{n-1}\right) - \left(\frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n\right)$$

$$= v \frac{D_x + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} - \frac{D_{x+1} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{_{|n}A_x = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)}$$

d) **gemischte Versicherung** (der Dauer n Jahre)

mit $A_{x:\overline{n}|}$ wird der Barwert dieser Versicherung vom Betrag 1 bezeichnet. Dieser Betrag wird ausbezahlt, entweder beim Tod des Versicherungsnehmers innerhalb der Versicherungsdauer oder beim Erleben des Alters x+n. Es folgt

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\ddot{a}_{x+\overline{n}|} - 1 + \frac{D_{x+n}}{D_x}) + \frac{D_{x+n}}{D_x} = 1 - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-v)}$$

Alle angegebenen Barwerte sind gleichzeitig auch die Nettoeinmalprämien.

Nettomehrfachprämien

Wir bestimmen die Nettomehrfachprämien für den Fall der Erlebensfallversicherung und der gemischten Versicherung.
Hierbei sollen die Prämien bis zum Tod, höchstens jedoch n Jahre gezahlt werden. Das führt aber auf eine vorschüssige temporäre Leibrente bγ).
Wir erhalten für die Erlebensfallversicherung (Versicherung vom Betrag 1)

$$\underbrace{P({}_nE_x)}_{\text{Prämie}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}_{\substack{\text{Barwert der}\\ \text{temporären}\\ \text{Leibrente}}} = {}_nE_x \Rightarrow P({}_nE_x) = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{N_x-N_{x+n}} = \frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

$$\underbrace{P(A_{x:\overline{n}|})}_{\text{Prämie}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}_{\substack{\text{Barwert der}\\ \text{temporären}\\ \text{Leibrente}}} = A_{x:\overline{n}|} \Rightarrow P(A_{x:\overline{n}|}) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - (1-v)$$

Beispiel: Versicherungssumme 100.000,- ÖS, x = 30, n = 20
(rechnungsmäßiger Zinsfuß 3%)

$$\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = \frac{N_{30}-N_{50}}{D_{30}} = 14.95394; \quad P({}_{20}E_{30}) = \frac{D_{50}}{N_{30}-N_{50}} = 0,03430$$

$$\Rightarrow 100.000,- \cdot P({}_{20}E_{30}) = 3.430,-$$

$$P(A_{30:\overline{20}|}) = \frac{1}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} - (1- \frac{1}{1,03}) = 0,03775 \Rightarrow 100.000,- \cdot P(A_{30:\overline{20}|}) = 3.775,-$$

$$P({}_{|20}A_{30}) = 3.775,- - 3.430,- = 345,-$$

3. Rechnungsgrundlage: Kosten

Man unterscheidet drei Kostenarten: sogenannte α, β- und γ-Kosten.
α-Kosten sind einmalige Kosten, die mit dem Abschluß eines Versicherungsvertrages zusammenhängen (Entschädigung der Außenorgane einer Gesellschaft ärztliche Untersuchungskosten, Ausstellung von Polizzen, Werbung).

(Die Kosten sind proportional zur Versicherungssumme bei der gemischten Versicherung und bei Renten proportional zum Barwert der Renten).

β-Kosten sind periodische Kosten, die bei der Erhebung der Prämien entstehen. (β-Kosten werden auf die Höhe der Prämie bezogen).

γ-Kosten sind periodische Kosten und stellen die inneren Verwaltungskosten dar, die nicht mit α-, β-Kosten zusammenhängen (Personalkosten, Mieten, Steuern).

Beispiel gemischte Versicherung:	α-Kosten 35‰ der Versicherungssumme
(periodische Zahlung)	β-Kosten 3% (4%) der Prämien
	γ-Kosten 4,25‰ der Versicherungssumme
Beispiel Altersrente:	α-Kosten 25‰ des Barwertes der insgesamt zu zahlenden Prämien
	β-Kosten 3% (4%) der Prämien
	γ-Kosten = 1,5‰ des Rentenbetrags

Ausreichende Prämien: Werden bei der Prämienkalkulation auch die Kosten berücksichtigt, so kommt man zu den sogenannten ausreichenden Prämien.

Ausreichende Prämien bei gemischter Versicherung (periodische Zahlung)

Bezeichnung: $P^a_{x:\overline{n|}}$ (Versicherungssumme 1)

Es gilt

$$\underbrace{P^a_{x:\overline{n|}}}_{\text{Prämie}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}_{\substack{\text{Barwert der}\\ \text{tempor. Leib-}\\ \text{rente, Betrag 1}}} = A_{x:\overline{n|}} + \underbrace{\alpha}_{\text{einmalig}} + \underbrace{\beta}_{\substack{\text{bezogen auf d.}\\ \text{Höhe der Prämie}}} \cdot (P^a_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}) + \underbrace{\gamma}_{\substack{\text{proport. Ver-}\\ \text{sicherungssumme}\\ \text{(periodisch)}}} \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$\Rightarrow P^a_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}} + \alpha + \gamma\, \ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

Will man die einzelnen Kostenanteile der ausreichenden Prämie bestimmen, so bilde man

$$P^a_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \beta \cdot P^a_{x:\overline{n|}} + \gamma$$

Beispiel: S = 100.000,-, x = 30, n = 20

Nettoprämie $P_{x:\overline{n|}}$ = 3.775,- (= 3.430,- Erlebensfall- + 345,-) Todesfallprämie ausreichende Prämie $P^a_{x:\overline{n}|}$ = 4.571,- zerlegt in

3.430,-	Erlebensfallpräm.
345,-	Todesfallprämie
234,-	α-Kosten
137,-	β-Kosten
425,-	γ-Kosten
4.571,-	

Gegenüberstellung: reiner Sparvorgang S = 100.000,-, n = 20 (3%)

Prämie 3.613,-

Ausreichende Prämie bei Altersrente (Rentenbetrag 1)

Nettoprämie: $P({}_{n|}\ddot{a}_x) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x \Rightarrow P({}_{n|}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

Ausreichende Prämie P^a:

$$P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n|}\ddot{a}_x + \alpha \cdot \underbrace{P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}_{\substack{\text{Barwert aller zu}\\ \text{zahlenden Jahres-}\\ \text{prämien}}} + \beta \cdot P^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_x$$

$$\Rightarrow P^a = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x + \gamma\, \ddot{a}_x}{(1-\alpha-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Deckungskapital (Deckungsrückstellung, Prämienreserve)

Betrachten wir die Prämien einer gemischten Versicherung, so zerfallen diese in:

einen Sparanteil, einen Risikoanteil und einen Kostenanteil.

Mit den Sparanteilen wird die Erlebensfallsumme angespart. Damit die Versicherungsgesellschaften ihren Verpflichtungen immer nachkommen können, verlangt die Aufsichtsbehörde, daß die angesammelten und verzinsten Sparanteile in den Deckungsrückstellungen ausgewiesen werden. Dies muß von einem versicherungsmathematischen Sachverständigen garantiert werden. Somit wird es notwendig, für jedes Jahr zwischen Versicherungsabschluß und Versicherungsende diese Deckungsrückstellungen zu berechnen. Wir betrachten zunächst nur die Nettodeckungsrückstellungen ${}_mV_x$ im m-ten Jahr nach Versicherungsabschluß (Abschlußalter x, Dauer n). Nach der sogenannten prospektiven Methode (vorausschauenden Methode) bestimmt sich

$${}_mV_x = \underbrace{B_{x+m}}_{\substack{\text{Barwert d. zukünftigen}\\ \text{Versicherungsleistung}\\ \text{m Jahre nach Abschluß}}} - \underbrace{P \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}_{\substack{\text{temporäre Leibrente}\\ \text{vom Betrag der Prämie P}\\ \text{der Dauer n-m}}}$$

(x+m : m-tes Jahr nach Versicherungsabschluß)

Für die gemischte Versicherung erhalten wir somit

$$_mV_x = \underbrace{A_{x+m:\overline{n-m}|}}_{\substack{\text{Barwert der Versich.summe 1}\\ \text{im m-ten Jahr nach Abschluß}\\ \text{(Dauer n-m)}}} - \underbrace{\underbrace{P_{x:\overline{n}|}}_{\text{Prämie}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}_{\substack{\text{temporäre Leibrente vom Betrag}\\ P_{x:\overline{n}|} \text{ der Dauer n-m}}}$$

Ausreichende Deckungsrückstellungen: Wir betrachten wieder die gemischte Versicherung. β- und γ-Kosten fallen hier mit den Prämien an und brauchen nicht im Deckungskapital berücksichtigt zu werden. Die Versicherungsgesellschaften haben sofort nach Abschluß der Versicherung den Anspruch auf die α-Kosten.

Bei den ausreichenden Prämien war der α-Kostenanteil gleich $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$. Da die α-Kosten sofort anfallen, bestimmt man das sogenannte gezillmerte Deckungskapital (Zillmerreserve) durch

$$_mV_x^z := \underbrace{_mV_x}_{\substack{\text{Nettodeckungs-}\\ \text{kapital}}} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \left(\Rightarrow \begin{array}{l} m = o: \; _oV_x^z = -\alpha \\ m = n: \; \underbrace{_nV_x^z = {_mV_x}}_{\substack{\text{auszuzahlender}\\ \text{Betrag}}} \end{array} \right)$$

Bemerkung: Durch dieses Vorgehen erhält man zum Versicherungsbeginn eine negative Deckungsrückstellung, die bei großen α-Sätzen in den ersten Jahren noch negativ sein kann. Der Gesetzgeber hat jedoch einen α-Höchstsatz von 35‰ festgesetzt. Reichen diese α-Kosten nicht aus, so sind die über 35‰ hinausgehenden Beträge wie γ-Kosten zu behandeln.

Diese Zillmerreserven sind maßgeblich für die Bilanz sowie auch für die Berechnung der Rückkaufswerte bzw. einer beitragsfreien Versicherung.

Gewinnbeteiligung:

Wie schon mehrmals erwähnt, werden die Berechnungen mit einem rechnungsmäßigen Zinsfuß von 3% durchgeführt, während die Versicherungsgesellschaften einen effektiven Zinsfuß von über 7% erzielen. Der erzielte Zinsgewinn ist mindestens zu 85% (90% BRD) an die Versicherungsnehmer wieder zurückzuzahlen (es werden ca. 95% zurückgezahlt). Es entstehen somit in jedem Jahr Zinsgewinne. Betrachten wir einmal das m-te Jahr nach Versicherungsbeginn, so haben wir die

"Einnahmen" $(\underbrace{_mV_x^z}_{\substack{\text{Deckungs-}\\ \text{rückstel-}\\ \text{lung}}} + \underbrace{B_m}_{\substack{\text{Prämie}\\ \text{ohne } \beta\text{- und}\\ \gamma\text{-Kosten}}})$ und die "Ausgaben" $(\underbrace{vq_{x+m}}_{\substack{\text{Todesfall-}\\ \text{leistung}}} + vp_{x+m} \cdot {_{m+1}V_x^z})$.

Ersetzt man die rechnungsmäßigen durch die effektiven Zinsen und die angenommenen Sterbewahrscheinlichkeiten durch die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten, so ergibt sich der Gewinn für das gesamte Jahr, der den Versicherungsnehmern fast zur Gänze gutgeschrieben wird.

Rentabilität einer Versicherung (Barwertpolynome)
Will man verschiedene Lebensversicherungen untereinander und auch mit anderen Sparformen vergleichen, so verwendet man den Begriff der Rentabilität. Man vergleicht den Barwert aller Beiträge mit dem Barwert der Leistungen der Versicherungsgesellschaft (inklusive Gewinnanteile). Man bildet das sogenannte Barwertpolynom

$$\boxed{i \longmapsto f(i) = \sum_{j=0}^{n-1} b^{(j)} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j - E \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}$$

wobei i der Zins, $b^{(j)}$ der Jahresbeitrag für das Jahr j, E die Erlebensfalleistung (inklusive Gewinnbeteiligung) und n die Versicherungsdauer ist.

Erlebensfallrentabilität (Rendite) wird $\tilde{i}$ mit $f(\tilde{i}) = 0$ genannt. (0 ist hierbei eine untere Schranke für $\tilde{i}$).
Bei Vergleich mit anderen Sparformen ist der zusätzliche Todesfallschutz zu berücksichtigen.
Es läßt sich zeigen, daß es nur eine Nullstelle $\tilde{i}$ gibt (zur Bestimmung dieser Nullstelle multipliziere man mit $(1+i)^n$ durch und wende das Newtonverfahren an. Für $f(\tilde{i}) = 0$ gilt $E = \sum_{j=0}^{n-1} b^{(j)}(1+\tilde{i})^{n-j}$

Je größer $\tilde{i}$ ist, umso besser ist die Verzinsung.
Bemerkung: Die (teilweise) Anrechnung der Versicherungsbeiträge als steuermindernde Sonderausgaben und die Steuerfreiheit der Gewinnerträge führen zu einer Erhöhung der Erlebensfallrentabilität.
Beispiel: Allianz Leben (BRD) gemischte Versicherung, $x = 25$, $n = 35$. Unter der Annahme, daß die Hälfte der Beiträge als Sonderausgaben bei einem Spitzensteuersatz von 35% geltend gemacht werden können, ergab sich 1976 für diese Versicherungsgesellschaft eine Rendite von 9,62%.

Literatur (eine Auswahl)

Isenbart/Münster: Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium, Gabler Verlag Berlin 1977.
Mohr/Hofmann: Lebensversicherung, Gabler Verlag Wiesbaden 1965.
Wolff, K.H.: Versicherungsmathematik, Wien-New York 1970.
Feilmeier, M.: Einführung in die Versicherungsmathematik I, Braunschweig 1977 (Vorlesungsskriptum).
Pollak, R.: Das Versicherungsaufsichtsgesetz, Wien 1979.